Fiche 1 – Outils mathématiques de gestion : rappels

[1. Introduction 1](#_Toc209338982)

[1.1. À savoir… 1](#_Toc209338983)

[1.2. Utilisations des outils statistiques en contrôle de gestion 2](#_Toc209338984)

[2. Dénombrement et calculs combinatoires 2](#_Toc209338985)

[2.1. Définitions 2](#_Toc209338986)

[2.2. Probabilités de base 3](#_Toc209338987)

[2.3. Probabilités conditionnelles et indépendance 3](#_Toc209338988)

[2.4. Lois de probabilités classiques 4](#_Toc209338989)

[2.5. Estimations et tests 4](#_Toc209338990)

[3. Variables aléatoires et lois de probabilités 5](#_Toc209338991)

[3.1. Variables aléatoires 5](#_Toc209338992)

[3.2. Lois de probabilité 5](#_Toc209338993)

[3.3. Paramètres des lois de probabilité 5](#_Toc209338994)

[3.4. Lois usuelles discrètes 6](#_Toc209338995)

[3.5. Lois continues 6](#_Toc209338996)

[3.6. Approximations 6](#_Toc209338997)

[4. Estimations et tests d’hypothèses 7](#_Toc209338998)

[4.1. Estimations 7](#_Toc209338999)

[4.2. Tests d’hypothèses 7](#_Toc209339000)

[4.3. Tableau récapitulatif 8](#_Toc209339001)

# Introduction

## À savoir…

* Le **dénombrement** sert à compter les cas possibles avant d’appliquer les probabilités.
* Les **probabilités** permettent d’évaluer les risques et de raisonner en termes d’événements.
* Les **lois de probabilité** (Bernoulli, binomiale, Poisson, normale) modélisent les phénomènes aléatoires.
* Les **estimations et tests** offrent des outils d’inférence statistique pour passer de l’échantillon à la population.
* En gestion, ces outils permettent de **mesurer l’incertitude**, **aider à la décision** et **valider des hypothèses** dans des contextes financiers, commerciaux ou industriels.
* Les **variables aléatoires** permettent de transformer le hasard en valeurs chiffrées.
* Les **lois discrètes** (Bernoulli, binomiale, Poisson) modélisent des phénomènes discrets comme les tirages ou dénombrements.
* Les **lois continues** (notamment la loi normale) s’appliquent aux phénomènes de masse (notes, tailles, rendements financiers).
* L’**espérance** et la **variance** sont essentielles pour résumer une loi.
* Les **approximations** facilitent les calculs quand n est grand.
* Les **estimations** (ponctuelles ou par intervalles) permettent d’extrapoler d’un échantillon vers la population.
* Les **tests d’hypothèses** valident ou rejettent des hypothèses statistiques, avec un risque d’erreur mesuré.
* L’**intervalle de confiance** précise la marge d’incertitude.
* Les **tests bilatéraux, unilatéraux et Khi²** sont les plus utilisés en gestion et en recherche.
* En contrôle de gestion et en finance, ces outils sont indispensables pour : comparer des performances, tester l’efficacité d’une méthode, ou évaluer des choix stratégiques.

## Utilisations des outils statistiques en contrôle de gestion

### Prévisions et budgets

* + Estimation du chiffre d’affaires futur (intervalles de confiance).
  + Construction de budgets fiables grâce à la variance et l’écart-type.

### Analyse des coûts et des risques

* + Calcul du coût espéré d’un projet selon différents scénarios.
  + Estimation du risque client (probabilité de défaut ou d’impayés).

### Contrôle qualité et production

* + Tests statistiques pour comparer la qualité à une norme.
  + Test du Khi² pour vérifier la conformité d’une production.

### Pilotage financier

* + Simulation du risque de rentabilité d’un investissement (loi normale).
  + Utilisation de tableaux de bord intégrant des marges d’incertitude.

# Dénombrement et calculs combinatoires

## Définitions

Le **dénombrement** consiste à déterminer le nombre de façons de sélectionner ou d’ordonner des éléments. On distingue :

* **Avec remise** (un élément peut être repris).
* **Sans remise** (chaque élément n’est choisi qu’une seule fois).
* **Ordonné** (l’ordre des éléments compte).
* **Non ordonné** (l’ordre ne compte pas).

### Tableau récapitulatif

| **Situation** | **Avec remise** | **Sans remise** | **Exemple** |
| --- | --- | --- | --- |
| **Ordonné** | p-listes (Lpₙ = n^p) | Arrangements (Aₚₙ = n! / (n–p)!) | Mots de passe avec ou sans répétition |
| **Non ordonné** | p-suites (Cₙ^(p+n–1)) | Combinaisons (Cₙ^p = n! / [p!(n–p)!]) | Tirages au loto |

### Exemple chiffré

Un mot de passe est formé de 4 lettres différentes choisies parmi les 26 de l’alphabet :

## Probabilités de base

### Définitions

* **Probabilité théorique** :
* **Probabilité expérimentale** : fréquence observée sur un grand nombre d’essais.

### Propriétés essentielles

* 0 ≤ P(A) ≤ 1
* P(∅) = 0 ; P(Ω) = 1
* P(A) = 1 – P(A̅)
* P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)
* Si A et B indépendants : P(A ∩ B) = P(A) × P(B)

### Exemple

Lancer d’un dé équilibré :

* P(nombre pair) = 3/6 = 0,5
* P(nombre multiple de 3) = 2/6 = 0,33
* P(pair et multiple de 3) = 1/6 = 0,17

## Probabilités conditionnelles et indépendance

### Probabilité conditionnelle

**Exemple** : lancer d’un dé.

* A = « multiple de 3 » = {3,6}, P(A)=2/6
* B = « nombre pair » = {2,4,6}, P(B)=3/6
* P(A|B)=1/3

### Théorème de Bayes

Permet d’inverser les probabilités :

**Exemple** : deux machines produisent des pièces, M1 (1/3) avec 5 % de défauts, M2 (2/3) avec 6 %.

Probabilité qu’une pièce défectueuse provienne de M1 :

## Lois de probabilités classiques

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Loi** | **Définition** | **Paramètres** | **Espérance** | **Variance** | **Exemple** |
| **Bernoulli** B(p) | 1 succès/échec | p | p | pq | Tirage pile/face |
| **Binomiale** B(n,p) | n épreuves de Bernoulli | n,p | np | npq | Nombre de réussites sur n essais |
| **Poisson** P(λ) | Phénomènes rares | λ | λ | λ | Nombre d’accidents/an |
| **Normale** N(μ,σ²) | Variable continue centrée autour de μ | μ,σ | μ | σ² | Notes d’examen, tailles |

## Estimations et tests

### Estimation ponctuelle

* Moyenne échantillon :
* Proportion échantillon :
* Écart-type corrigé :

### Intervalle de confiance

Si n≥30 et variance connue :

**Exemple** : n=100, , σ=7,5, α=5 %.

### Tests d’hypothèse

* **H0** : hypothèse nulle
* **H1** : hypothèse alternative
* Risque de 1ère espèce (α) = rejet à tort de H0
* Test du Khi² : comparer une distribution observée à une distribution théorique.

**Exemple** : test bilatéral sur la durée de vie d’écrans plats (H0: μ=10 000 h, H1 ≠ 10 000 h). Si la moyenne observée est en dehors de l’intervalle critique, H0 est rejetée.

# Variables aléatoires et lois de probabilités

## Variables aléatoires

### Définition

Une **variable aléatoire (v.a.)** associe un **nombre réel** à chaque issue d’une expérience aléatoire.

* **Discrète** : prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs (ex. somme de deux dés).
* **Continue** : prend toutes les valeurs d’un intervalle réel (ex. temps d’attente).

### Exemple

Deux dés : la v.a. X = somme des points prend les valeurs {2,…,12}.

* P(X=2)=1/36
* P(X=7)=6/36
* P(X=12)=1/36

## Lois de probabilité

### Définition

Une **loi de probabilité** associe à chaque valeur possible d’une v.a. X la probabilité de son occurrence :

La **fonction de répartition** F(x) est définie par :

### Exemple

Somme de deux dés :

## Paramètres des lois de probabilité

### Espérance (valeur moyenne)

### Variance et écart type

## Lois usuelles discrètes

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Loi** | **Définition** | **Paramètres** | **Espérance** | **Variance** | **Exemple** |
| **Bernoulli** B(p) | Succès/échec | p | p | pq | Tirage pile/face |
| **Binomiale** B(n,p) | n épreuves de Bernoulli | n,p | np | npq | Nombre de réussites |
| **Poisson** P(λ) | Phénomènes rares | λ | λ | λ | Nombre d’accidents/an |

#### Exemple – Loi binomiale

On répète 5 fois un tirage avec p=0,4 (succès). Probabilité d’obtenir 2 succès :

## Lois continues

### Définition

Une v.a. **continue** X suit une loi de densité f(x) si :

### Loi Normale

La **loi normale N(μ,σ²)** est la plus utilisée :

* Courbe en cloche centrée en μ, symétrique.
* 68 % des valeurs dans [μ – σ ; μ + σ].
* 95 % dans [μ – 2σ ; μ + 2σ].

**Normalisation** :

**Exemple – Table de la loi normale**

Si X ~ N(100, 10²), probabilité que X ≤ 115 :

## Approximations

* **Binomiale → Poisson** si n grand et p petit (np < 15).
* **Binomiale → Normale** si n ≥ 30 et npq ≥ 10.
* **Poisson → Normale** si λ > 15.

# Estimations et tests d’hypothèses

## Estimations

#### Objectif

À partir d’un **échantillon**, estimer les **paramètres** de la **population mère** :

* Moyenne μ,
* Proportion p,
* Écart-type σ.

### Estimations ponctuelles

* **Moyenne échantillon** : ≈ μ
* **Proportion** : f ≈ p
* **Écart-type corrigé** :

Ces estimateurs sont dits **non biaisés** (sauf l’écart-type brut).

**Exemple :** sur un échantillon de 50 salariés, salaire moyen = 2 100 €. On estime μ ≈ 2 100 €.

### Estimations par intervalles de confiance

On ajoute une **marge d’erreur** avec un niveau de confiance (1–α).

**Cas de la moyenne (μ)**

* Si variance connue et n ≥ 30 :

**Exemple :** n=100, , σ=7,5, α=5 % :

**Cas d’une proportion (p)**

**Exemple :** sur 100 clients, 24 connaissent une promo :

## Tests d’hypothèses

### Définitions

* **H0** : hypothèse nulle (ex. μ = μ₀)
* **H1** : hypothèse alternative (μ ≠ μ₀, μ > μ₀ ou μ < μ₀)
* **α** : risque de 1ère espèce (rejeter H0 à tort)
* **β** : risque de 2ème espèce (accepter H0 à tort)
* **Puissance du test** : 1–β

### Types de tests

* **Test bilatéral** : H1 ≠ valeur de référence.
* **Test unilatéral** : H1 > ou < valeur de référence.
* **Tests usuels** :
  + Comparaison d’une moyenne, d’une proportion, d’une variance.
  + Comparaison de 2 échantillons (moyennes, proportions).
  + **Test du Khi²** : ajustement, indépendance, homogénéité.

### Exemple – Test bilatéral sur une moyenne

Ancien procédé : μ=10 000 h, σ=1 200 h.

Nouveau procédé : échantillon de 100 écrans, moyenne = 10 300 h.

* H0 : μ = 10 000 ; H1 : μ ≠ 10 000 ; α = 5 %.
* Intervalle critique : [9 764,8 ; 10 235,2].
* Comme 10 300 ∉ IC → rejet de H0 → nouveau procédé **différent**.

### Exemple – Test unilatéral

Même cas, mais H1 : μ > 10 000.

Seuil critique = 10 198.

Comme 10 300 > 10 198 → H0 rejetée → nouveau procédé **meilleur**.

### Exemple – Test du Khi² d’ajustement

On compare une distribution observée à une loi théorique.

Si X² observé > X² critique (table), on **rejette H0** (les distributions diffèrent).

## Tableau récapitulatif

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Outil** | **Formule** | **Utilité** |
| **Estimation ponctuelle** | Moyenne , proportion f, écart-type s | Donner une valeur unique |
| **Intervalle de confiance** |  | Estimer un paramètre avec une précision |
| **Test d’hypothèse** | Comparaison H0/H1, seuil α | Décider si on accepte ou rejette H0 |
| **Test du Khi²** |  | Vérifier un ajustement ou indépendance |